贵州大学学报（自然科学）
Journal of Guizhou University
(Natural Scence)
6(3)：47—54，1989

常微方程发展概况

杨世藩

（贵州大学数学系，阳贵）

摘　要

本文简要地阐述常微分方程的发展概况及一些实际应用。

关键词　常微分程　概况

动运是物质的固有属性。整个世界充满着物质有规律的运动。运动着的物质相互制约，且以无限错综的关系联系着。数学是从量和形的侧面研究物质运动变化客观规律的科学。由于物质运动的复杂性，人们经常遇到一些量对另外一些量的依存规律未知的，对于所要求的依存规律一未知函数，往往能作出满足某种条条的关系式，这类关系式就叫做泛函方程，微分方程是泛函方程中重要的一种方程。按习惯性的说法，所谓微分方程，就是联系着自变量、未知函数及其导函数的关系式。仅含一个自变量的微方程称为常微分方程。

常微分方程产生于人类的生产实践，它的雏型出现比微积分的发明还早。纳泊尔（John Napier，1550—1617）发明对数、伽利略(G.Galileo，1564—1642)研究自由落体运动、笛卡儿(Descartevs，1596—1650)在光学问题中由切线性质定出镜面的形状等，实际上都需要建立和求解微分方程。

三百多年前在牛顿(Newton，1642—1727)和莱布尼兹(Leibnitz，1646—1716)奠定微积分的基本思想的同时，他们也正式提出了微分方程的概念。从十七世纪未到十八世纪，为与微积分和代数的发展水平相适应，当时常微分方程研究的中心问题是如何求出通解的表达式。伯努利一家（这个非凡的瑞士家族在三代时间里出了八个数学家，其中 Jacob Bernoulli，1654—1705；Johann Bernoulli，1667—1748和他的儿子Daniel Bernoulli，1700—1782的工作较突出)对分离变量法和换元法，欧拉(Euler，1707—1733）对降阶法、积分因子法和求常系数齐次线性方程的通解，达朗伯尔(D' Allmbert，1717—1783)关于非齐次线性方程通解的迭加原理，拉格朗日(Lagrange，1736—1813)由齐次线性方程通解经常数变易法得出非齐次方程的特解，克莱洛(Clairaut，1713—1765)关于全微分方程的充要条件和奇解的概念[2]，以及十九世纪末引进的算子方法和拉普拉斯(Laplace，1749—1827)变换……等，都是这方面的重大成就。欧拉还第一个考虑了一般常微分方程解的存在问题，提出了现时称为“欧拉折

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

线法”的近似方法，这种方法尽管当时还未达到近代分析要求的严格性，但为以后解的存在性的严格证明和数值计算提供了重要的途径。到十八世纪末，常微分方程已发展成为一个重要的数学分支，成为当时工程技术、物理、力学等学科的基本工具之一。

十九世纪初，由于生产发展对科学技术日益精密的要求和与之相应的数学各分支的迅猛发展，整个数学科学进入一个理论上严格化的发展阶段。数学分析的严密概念建立起来了，其主要奠基人柯西(Cauchy，1789—1857)同时也对常微分方程初值问题解的存在、唯一性首先给出了严格的证明。在此以后，不少人研究了解的存在性的不同证法，解的唯一性条件的可能形式，解与初值和参数的相依性问题，解的延拓，解的整体存在性，右端不连续系统的研究等等，这些基本理论的研究是常微分方程论中极为重要的基础。

虽然在相当广泛的条件下严格地证明了常微分方程初值问题解的存在性，但实际上求解却遇到了越来越多的困难，人们逐渐明确了能用初等函数表达其解的微分方程是很少的。特别是 1841 年刘维尔(Liouville)证明了黎卡提(Ricatti)方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$$

除个别情况外，一般地，其解不能用初等函数的积分表达。然而，科学研究和实际问题又急需求解微分方程，这就促使人们从各方面研究微分方程的求解问题。一方面，求由满足一定初始条件或边界条件的解的近似值的各种数值方法得到了迅速发展。另一方面，不限制在初等函数的范围，把微分方程的解看作由该方程的定义的一种新函数——超越函数，在关于对方程的很广泛的假设下，可以证明它的解有级数形式，人们能根据每一个方程的特点推导出解的许多性质，在工程、物理、天文等方面具有很大的实用价值的许多特殊函数都属于此类，研究这类新函数的数值和性质，扩大了函数的园地，产生了微分方程解析理论这一重要分支。

在十九世纪后半叶，天体力学及其它技术科学提出的一些问题中，需要研究较复杂的微分方程解的局部和全局性质。但由于绝大多数的这种方程不能用初等函数的积分表达通解，因此人们考虑，直接根据微分方程的结构来研究微分方程解的属性。为此，法国数学家庞卡莱(H.Poincar'e，1854—1912)就开始了微分方程的定性研究，从1881年到1886年先后发表了四篇论文。这四篇论文研究的主题有：奇点附近积分曲线的几何拓扑结构；奇点的指数以及奇点在大范周的全局分布；极限环(即孤立周期解)问题；环面上的积分曲线；空间周期解的存在及其附近积分曲线的几何拓扑结构等。后来编成《微分方程定义的积分曲线》一书[1]。庞卡莱的这四篇论文侧重于几何、拓扑的观点，把常微分方程看成是充满平面或空间的曲线族，由微分方程本身直接研究积分曲线族的(局部或全局)的几何性质，由所得结果再导出解的性质的结论。与此同时，俄国数学家李雅普诺夫(А. М. Дяпунов，1857—1918)于1882年到1892年完成了博士论文《运动稳定性的一般问题》[3][4]。他的稳定性定义一方面深刻地反映了物理的本质，另一方面又具有严格的数学含义。他提出了两种解决稳定性问题的方法，第一方法是直接考察受干扰运动，也就是解决相应的微分方程的普通解或特殊解。这些解常常必须以某些级数的形式来探求。他的第二方法即直接方法，它不需寻求干扰运动方程的解，而是归结于寻求一个具有特殊性质的函数 $V(t\ \ x)$——李雅普诺夫函数。他借助于函数 $V(t\ \ x)$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

和根据干扰运动方程所计算得的$\frac{dv}{dt}$的符号性质建立了一些准则，由它直接判定运动的稳定性。李雅普诺夫通过严格的分析论证，具体地研究了定常运动和具有周期系数的运动的稳定性问题，第一次严格地建立了用第一次近似方程来确定稳定性的条件，并对若干临界情形进行了极其深入、彻底的研究。

1926年物理学家范德坡(Van der pol)讨论了描写三极电子管中等幅振荡的方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt}+x=0$$

他用图解法证明了孤立闭轨线的存在性，但没有给出严格的数学论证。在无线电技术中需要产生稳定的自激等幅振荡，这种振荡不能由线性系统产生。因此迫使人们研究非线性振荡及由此产生的非线性常微分方程。苏联理论物理学家安德罗诺夫(A. A. Андронов)将范德坡的工作与庞卡莱的极限环理论联系起来，进行了一系列的工作。1929年安德罗诺夫在论《Poincare' 极限环和自振理论》一文中指出：庞卡莱在为解决天体力学问题所导出的极限环的重要数学工具，正是范德坡方程所需的孤立的稳定等幅振荡，“自振的问题，就是求极限环线的问题”。这样一来，安德罗诺夫把两门初看来是完全无关的学科——常微分方程定性理论和无线电振动产生的技术的本质之间的联系找到了，这就开辟了常微分方程定性理论的一个重要应用领域——非线性振荡。常微分方程定性理论，从这个领域中找到了不少的研究对象。奇点、极限环、指数及积分曲线的全局分布等也得到了具体而广泛的应用。这方面的结果集中地汇集在A.A.安德罗诺夫、A.A.维特和C.Э.哈依金的《振动理论》一书中。此外，继Poincare'的工作之后，伯克霍夫(G. D. Birkhoff, 1884—1944)等继承了他在天体力学上的探讨及与之联系的动力系统的发展，在1912—1927年间开创了《动力系统》理论。这一理论从三十年代至今已有很大发展，它把古典的动力系统发展到抽象的动力系统——一个到自身的单参数连续变换群，它已抛开了具体的微分方程。特别是平面动力系统，五十多年来的发展，其理论成果较为完整。近年来动力系统的符号和概念被广泛地应用。此外，分支理论也是近年来微分方程定性理论中非常活跃的一个领域。

按李雅普诺夫意义下的运动稳定性理论，研究的是干扰性因素对于物质系统运动的影响。正因为实际情况中干扰性因素总是不可避免地存在，所以运动稳定性问题就具有重要的理论和实际意义。这也是近三十年来稳定性理论蓬勃发展的原因。李雅普诺夫函数方法是研究自动调节系统的最有成效的方法之一。对具体的非线性自动调节系统而言，适当地作出李雅普诺夫函数，就能解决一系列有重大实际意义的问题。例如，可以给出调节量变化的估计，过渡过程经过的时间（调节时间）的估计、调节质量的估计等。利用李雅普诺夫函数，可以估计经常作用下扰动的影响，可以解决大范围稳定性问题，即估计初始扰动的区域，使得随着时间的增加，其解不离开予先给定的区域的范围。李雅普诺夫函数也可用于最佳控制理论。在某些情况下，用李雅普诺夫函数的方法也可以解决关于周期解存在的问题，等等。稳定性理论吸引着全世界数学家的注意，而且李雅普诺夫的直接方法现在已得到了工程师的广泛赞赏。稳定性理论在美国正迅速地变成训练自动控制方面的工程师的一个标准部分。现在稳定性理论的方法结果已经推广到泛函微分方程、随机微分方程、偏微分方程以及动力系统中去。同时在自动控制系统、电子技

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

术、卫星姿态动力学、大型动力系统以及生态学等新技术、新领域中均有重要的应用。

二十世纪自然科学和技术科学的发展，一个显著的特点是多学科的相互渗透，数学向各个学科的渗透更为普遍和突出。常微分方程作为数学模型广泛地应用于现代生物学、生态学、生理学、医学、经济学和化学等领域，下面我们试举两例：

例 1[8] Volterra 方程

本世纪二十年代初期，意大利生物学家 Umberto D'Ancona 在研究鱼类捕捞动态时，发现第一次世界大战期间，地中海各港口大鱼（鲨鱼等）的捕获量百分比显著增加。他猜想，这可能是因为大争期间捕鱼活动大大减少；但是，他又看到，同在这一时期，小鱼数量亦有所增加，他对此迷惑不解，到底捕鱼活动之数量如何影响鱼群数量？这个问题与他研究的物种生存竞争问题密切相关，同时，捕鱼业对此亦甚关注。1962年，他求助于他的同事、著名的意大利数学家 Vito Volterra 经共同研究，把鱼分为两类，即捕食者（大鱼）与被捕食者（小鱼），用 $x(t)$ 表示被捕食者在时刻 t 的数量，$y(t)$ 表示捕食者在时刻 t 的数量，并假设：

(1) 被食者的食物丰富，当不存在捕食者时，被食者按 $\dot{x}=Ax$ 的规律增长，其中 A 为某一正常数。单位时间内捕食者与被捕食者相遭的次数为 Bxy，其中 B 是某一正常数。

(2) 捕食者的自然减少率和它们存在的数目 y 成正比，即为 $-Dy$，而其自然增长率同它存在的数目 y 和被食者的数目 x 乘积成正比，即 Cxy（常数 $D>0$，$C>0$）。

(3) 考虑捕鱼活动的影响，设捕鱼活动以速率 εx 降低被食鱼数量，以速率 εy 降低捕食鱼数量，这里 ε 是一个参数，它反映捕鱼活动的强度（例如出海捕鱼的鱼船数目，下网数目等等）。设 $A-\varepsilon>0$。

于是，上述问题可用下列常微分方程（称为 Volterra 方程）描述：

$$\begin{cases} \dot{x}=Ax-Bxy-\varepsilon x=(A-\varepsilon)x-Bxy \\ \dot{y}=-Dx+Cxy-\varepsilon y=-(D+\varepsilon)y+Cxy \end{cases} \qquad (1)$$

将上述方程中两式相除，得方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{[Cx-(D+\varepsilon)]y}{[(A-\varepsilon)-By]x}$$

分离变量，求出解

$$Cx+By-(D+\varepsilon)lnx-(A-\varepsilon)lny=k$$

也就是说，上述 Volterra 方程的轨线是函数

$$H(x,\ y)=Cx+By-(D+\varepsilon)lnx-(A-\varepsilon)lny$$

的等位线。显然 $H(x,\ y)$ 在 $x>0$，$y>0$ 平面上以点 $\left(\frac{D+\varepsilon}{C},\ \frac{A-\varepsilon}{B}\right)$ 为唯一的极小点。所以方程的每一条轨线都是闭轨，且以点 $\left(\frac{D+\varepsilon}{C},\ \frac{A-\varepsilon}{B}\right)$ 为中心。因此任一满足初始条件 $x(0)>0$，$y(0)>0$ 的解 $x(t)$，$y(t)$ 都是 t 的周期函数，从而大鱼数量 $y(t)$ 与小鱼数量 $x(t)$ 周期性地消长。无论如何，大鱼、小鱼都不会灭绝，但也不会无止境地

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

增长。现在考虑$x(t)$，$y(t)$的“平均值”，用x除(1)的第一式两端，并积分，可得

$$\frac{1}{T}\int_0^T\frac{x'(t)}{x(t)}dt=\frac{1}{T}\int_0^T[(A-\varepsilon)-By(t)]dt$$

因$\int_0^T\frac{x'(t)}{x(t)}dt=\ln x(T)-\ln x(0)=0$，故得$y(t)$的“平均值”$\overline{y}$：

$$\overline{y}=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt=\frac{1}{BT}\int_0^T(A-\varepsilon)dt=\frac{A-\varepsilon}{B}$$

同理可得$x(t)$的“平均值”$\overline{x}$：

$$\overline{x}=\frac{D+\varepsilon}{C}$$

(上述T是周期函数$x(t)$，$y(t)$的周期。)所以$\overline{x}$是ε的单调增函数，$\overline{y}$是ε的单调减函数。当捕鱼活动水平下降(ε减小)时，捕食鱼的“平均值”$\overline{y}$增加，而被食鱼的“平均值”$\overline{x}$减少。这个结论就是所谓“Volterra原理”，它解释了D'Ancona的疑问。同样，我们也可以把“Volterra原理”用于对害虫的管理。我们可以把被食者比作害虫，捕食者比作天敌，把捕鱼作用看作杀虫剂的效应。于是这个原理告诉我们适当减少使用杀虫剂，只会有利于天敌的生长，从而控制住害虫的种群密度。如果过多施用杀虫剂，会使天敌的数目相对减少，害虫的数目反而相对增加。例如，1968年，一种害虫叫做绵介壳虫偶然从澳洲传到美洲，使美国加里福尼亚洲柑桔种植业面临毁灭的威协，于是从澳洲引入该虫的天敌澳洲瓢虫，实行以虫治虫，取得极大成功，把介壳虫数量降到低水平。后来，当DDT问世，园艺家纷纷广泛施用DDT，企图进一步降低介壳虫数量，可是，事与愿违，结果完全按“Volterra原理”所予料的那样，介壳虫数量反而增加。

后来，不少数学家对Volterra型微分方程进行修改和推广，把它关于物种之间相互作用的假设，修改得更切合实际，从而引出许多数学问题。Volterra型微分方程及其推广形式，不但在生态学中广泛遇到，而且在其它生物学研究领域或近代物理中亦会碰见。例如在神经网络、光学脉脬、激光理论及热对流的研究中亦有应用。这是常微分方程理论渗入近代生物学和近代科学领域的一个侧面。

例2[8]，无浓度扩散的三分子模型

在Prigogine等人所建立的非平衡统计热力学中，三分子模型起着重要作用，它有助于阐明远离平衡态非线性体系存在耗散结构。三分子模型的反应式一般写为

$$A\underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}}X$$

$$B+X\underset{k_{-2}}{\overset{k_2}{\rightleftharpoons}}Y+D$$

$$2X+Y\underset{k_{-3}}{\overset{k_3}{\rightleftharpoons}}3X$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$X \underset{k_{-4}}{\overset{k_4}{\rightleftharpoons}} E$$

其中 $A>0$、$B>0$ 分别为反应物的浓度，D、E 分别为生成物的浓度，X、Y 分别为中间产物的浓度。Prigogine 等人着重讨论了存在浓度扩散的情况。经标度变换，并略去逆反应的反应速度之后，上述反应式涉及 X，Y 的微分方程（称为三分子模型）为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t}=A-(B+1)X+X^2Y+D_1\nabla^2X \\ \dfrac{\partial X}{\partial t}=BX-X^2Y+D_2\nabla^2X \end{cases} \tag{2}$$

其中 D_1、D_2 分别为 A、B 的扩散系数。现在，我们假设化学反应是均匀的，也就是说没有浓度扩散的情况。略去三分子模型中扩散项，即得到无浓度扩散的三分子模型（也就是生物化学中的 Bruslator 分程）：

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt}=A-(B+1)X+X^2Y \\ \dfrac{dY}{dt}=BX-X^2Y \end{cases} \tag{3}$$

用常微分方程定性理论可研究中间产物浓度 X、Y 随着反应时间变化的规律。

当 $A\neq 0$ 时，方程 (3) 有唯一确定的奇点 $P\left(A,\ \dfrac{B}{A}\right)$，引入坐标变换

$$x=X-A, \qquad y=Y-\frac{B}{A}$$

方程组 (3) 化为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=(B-1)x+A^2y+\dfrac{B}{A}x^2+2Axy+x^2y \\ \dfrac{dy}{dt}-Bx-A^2y-\dfrac{B}{A}x^2-2Axy-x^2y \end{cases} \tag{3'}$$

原点 0（0，0）是 (3′) 的唯一奇点。考虑 (3′) 的一次近似方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=(B-1)x+A^2y \\ \dfrac{dy}{dt}=-Bx-A^2y \end{cases} \tag{4}$$

其特征方程是

$$\lambda^2+(A^2+1-B)\lambda+A^2=0$$

特征根

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left[B-(1+A^2)\pm\sqrt{(A^2+1-B)^2-4A^2}\right]$$

显然奇点 0（0，0）是初等奇点，且非鞍点。根据奇点理论和极限环论或分支理论可

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

证：对于方程组(3)，当 $B\leqslant 1+A^2$ 时，奇点 $P\left(A, \frac{B}{A}\right)$ 是全局渐近稳定的；当 $B>1+A^2$ 时，奇点 P 是不稳定吸引子(远离型)，并且当 B 充分接近 $B=1+A^2$ 时，(3)在奇点 P 附近存在唯一的稳定极限环。由上所述，当 $B>1+A^2$ 时产生稳定极限环，而当 $B\leqslant 1+A^2$ 时并不产生。这就暗示着化学振荡有一个浓度范围。从热力学观点来看，极限环只发生在远离平衡态的开系，这种极限环型化学振荡是属于时间上的耗散结构。这里所讨论的这个体系正是这种开系，因为当反应物大量存在时，各个反应都是不可逆的，产物亦可作随时排出反应区的假定。

属于极限环线的化学振荡最常见的有两个，其一为 H_2O_2 在 HIO_3 下催化分解；另一个为丙二酸在酸性介质中和 $KBrO_3$ 混合以 Ce^{++} 作催化剂的反应。二者的极限环线均为唯一的。由此可见，用常微分方程理论证明的结论是有实际意义的。

三十年多年来，我国数学家在常微分方程方面，无论是理论研究还是应用研究都作出了重要贡献。出版了一些专著。例如，秦元勋编著的《微分方程所定义的积分曲线》；秦元勋等著的《运动稳定性理论与应用》；叶彦谦著的《极限环论》；张芷芬等著的《微分方程定性理论》；林振声著的《概周期微分方程与积分流形》等等，书中不仅有作者们深入研究的丰硕成果，而且介绍了国内外有关的最新工作。秦元勋还系统地研究了常微分方程解族在复域中的统一规律，以及对实域的应用，他在1983年的研究成果《常微分方程定义的积分曲面》，证明了二次系统最多有四个极限环，且是一、三结构，这就使二次系统的解的结构得到了最终解决，这是对解决著名的世界数学难题——D.Hilbert 第16问题的重大突破。他的研究方法，也为在大范围的、具有统一规律的复数领域解决 D.Hilbert 第16问题指出了新的途径，廖山涛对微分动力系统稳定性的研究，获得了很多重要的成果，得到国内外数学界的著名科学家的高度评价。

科学技术的飞速发展，使不同学科之间交叉逾越，学科之间的相互渗透与综合，形成了一些与常微分方程交叉、综合的学科。国内一些定性理论工作者在80年代迅速地转向了生物数学，开展生物(生态)微分方程的研究，做出了一些有意义的成果[16]，一些稳定性理论工作者在70年代末期，开展了泛函微分方程的研究，李森林等著的《泛函微分方程》总结了他们近期的工作。还有的研究离散动力系统的稳定性、随机微分方程的稳定性、大型控制系统等等[18]-[20]，在这些方面分别都有专著出版。此外，现代化方法一计算机辅助设计也引入了常微分方程领域，并做出了突出成绩[10]。

参考文献

1 秦元勋，微分方程所定义的积分曲线（上册），科学出版社，1959

2 G F 塞蒙斯，微分方程—附应用及历史注记，张理京译，人民教育出版社，1981

3 Дяпунов А М, Обшая задача об устойичвости движения, Фиэматгиэ 1959

4 秦元勋，运动稳定性的一般问题讲义，科学出版社，1958

5 Van det pol B. On relaxation oscillations. Phil. Mag., Mag., Tth series, 1926, 2: 978

6 Andronow A A, Les cycles limites de Poimcare' et la theorie des

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

oscillation auto-entretenues, comptes Rendus, 1929 189, 559—561
7 A A 安德罗诺夫、A. A. 维持和 C 3 哈依金，振动理论，科学出版社，1973
8 李炳熙，生态学中的Volterra微分方程，1978年8月1全国常微分方程学术讨论会资料
9 张棣，常微分方程定性理论及应用，西北大学出版社，1985
10 秦元勋、王慕林、王联，运动稳定性理论与应用，科学出版社，1981
11 叶彦谦等，极限环论，上海科学技术出版社，1684
12 张芷芬等，微分方程定性理论，科学出版社，1685
13 林振声，概周期微方程和积分流形，上海科技出版社，1688
14 秦元勋，常微分程定义的积分曲面，西北大学学报，1984;
15 D Hilbert, Mathematische Probleme Göttingen Nachrichen 1900; 253—293
16 陈兰荪，数学生态学模型与研究方法，科学出版，1688
17 李森林、温立志，泛函微分方程，长沙，河南省科技出社，1687
18 刘永清、宋中昆，大型动力系统的理论与应用一分解、稳定与结构，华南工学院出版社，1687
16 刘永清、徐维鼎，大型动力系统的理论与应用一建模、镇定与控制，华南工学院出版社，1688
20 廖晓昕、稳定性的数学理论及应用，华中师大出版社，1688

The Survey of the Development in Ordinary Differential Equations

Yang Shifan

(*Department of Mathematics, Guizhou University, Guiyang*)

Abstract

This paper surveys briefly the general situation of development of ordinary equations and some applications of the equations.

Key words Ordinary Differential Equations, survey

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net